1　加法定理・倍角・半角公式まとめ

1.1　加法定理

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

1.2　倍角公式

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- $$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}$$
- $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

角が倍

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$ の形でも使えるように！

1.3　半角公式

- $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{2}$
- $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos\theta}{2}$
- $\tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

角が半分

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$ の形でも使えるように！

1.4　3 倍角

- $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
- $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

〔3 倍角の証明 ($\sin 3\theta$)〕

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta \qquad \longleftarrow \quad \sin 2\theta,\ \cos 2\theta \text{ の倍角公式} \\ &= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

1.5　積から和

- $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　　(①＋②)
- $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$　　(①－②)
- $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$　　(③＋④)
- $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$　　(③－④)

〔証明〕

加法定理

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　…①

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　…②

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　…③

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　…④

①＋② より

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \quad \cdots ⑤$$

$$\iff \quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

1.6　和から積

- $\sin A+\sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　　(①＋②)
- $\sin A-\sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$　　(①－②)
- $\cos A+\cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　　(③＋④)
- $\cos A-\cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$　　(③－④)

〔証明〕

$\alpha+\beta = A,\ \ \alpha-\beta = B$ とおくと　$\alpha = \dfrac{A+B}{2},\ \ \beta = \dfrac{A-B}{2}$

⑤より　$\sin A+\sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$