1　微分法 (数学 III)

1.1　導関数の定義

● 導関数の定義　$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

● 微分係数の定義　$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$　　$f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

1.2　微分の計算 1

● α を実数とするとき　$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$　　(対数微分法を用いて証明できる $\longrightarrow$ 1.7)

☆　微分の計算は指数の形に直すこと

☆　分母が単項式の場合，分数を分けること

1.3　積の微分・商の微分

● 積の微分　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

● 商の微分　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$　　特に　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

〔積の微分の証明〕

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

※ 商の微分も定義から証明できる

1.4　微分の計算 2

● 三角関数の微分　$(\sin x)' = \cos x$　　$(\cos x)' = -\sin x$　　$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

〔$\sin x$ の微分〕

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\cos h - 1}{h}\cdot\sin x + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right\} \qquad \longleftarrow 1\pm\cos x \text{ がある→有理化 or 倍角}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{-\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cdot h\cdot\frac{1}{\cos h + 1} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right\} = \cos x$$

※ $\cos x$ の微分も同様に計算

〔$\tan x$ の微分〕

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1.5　微分の計算 3

● 指数関数・対数関数の微分

$$(e^x)' = e^x \qquad (\log|x|)' = \frac{1}{x} \qquad (a^x)' = a^x\log a \qquad (\log_a|x|)' = \frac{1}{x\log a}$$

● e の定義　　$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$　　$e = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$

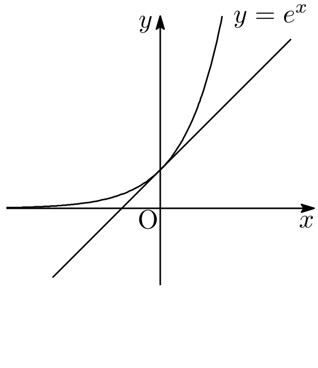
※ 対数の底 e は省略可

※ a^x の微分は対数微分法を用いて証明する $\longrightarrow$ 1.7

〔e に関して〕

a^x を導関数の定義を用いて微分すると....

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\cdot\frac{a^h - 1}{h} \quad \cdots ①$$



ここで，$y = a^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きが 1 となるような a の値を e とすると，微分係数の定義より

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - e^0}{h - 0} = 1 \quad \text{つまり} \quad \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad \cdots ②$$

①において，$a = e$ とすると

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h - 1}{h} = e^x \qquad (\text{②より})$$

したがって　$(e^x)' = e^x$　　$\longleftarrow$ 微分しても変わらない

次に，②より，h が十分に 0 に近いとき　$\dfrac{e^h - 1}{h} \fallingdotseq 1$　つまり　$e \fallingdotseq (1+h)^{\frac{1}{h}}$

よって　$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$　　　(計算すると $e = 2.718\cdots$ となる)

〔$\log|x|$ の微分〕

$x>0$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\log|x|)' = (\log x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+t\right)^{t} \qquad \left(t=\frac{h}{x}\text{ と置く}\right) \\
&= \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$x<0$ のとき，合成関数の微分から　$(\log(-x))' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$　となる。$\longrightarrow$ 1.6

〔$\log_a|x|$ の微分〕

$$
\begin{aligned}
(\log_a|x|)' &= \left(\frac{\log|x|}{\log a}\right)' && \longleftarrow \text{底の変換公式 (底を } e \text{ にした)} \\
&= \frac{1}{\log a}(\log|x|)' && \longleftarrow \frac{1}{\log a}\text{ は定数なので前に出す} \\
&= \frac{1}{x\log a}
\end{aligned}
$$

1.6　合成関数・逆関数の微分

● 合成関数の微分　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$　　$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\times g'(x)$

※ $\dfrac{dy}{dx}$ は y を x で微分するという記号で，y'，$f'(x)$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ も同じ意味。

● 逆関数の微分　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

〔合成関数の微分の証明〕

$\varDelta u = g(x+\varDelta x) - g(x)$　$\cdots$ ①　　$\longleftarrow$ $g(x)$ の増加分

$\varDelta y = f(x+\varDelta x) - f(x)$　　$\longleftarrow$ $f(x)$ の増加分

とし，$u=g(x)$ とすると，導関数の定義から　$\dfrac{du}{dx} = \lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{g(x+\varDelta x)-g(x)}{\varDelta x} = \lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta u}{\varDelta x}$

また，$y=f(u)$ とすると，　$\dfrac{dy}{du} = \lim\limits_{\varDelta u\to 0}\dfrac{f(u+\varDelta u)-f(u)}{\varDelta u} = \lim\limits_{\varDelta u\to 0}\dfrac{\varDelta y}{\varDelta u}$　である。

合成関数 $y=f(g(x))$ について，$u=g(x)$ とすると　$y=f(u)$

$$
\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\cdot\frac{\varDelta u}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta u\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta u}{\varDelta x} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}
$$

(①より，$\varDelta x\to 0$ のとき $\varDelta u\to 0$)

〔逆関数の微分の証明〕

$y=f^{-1}(x)$ から　$x=f(y)$

両辺 x で微分して　$1 = \dfrac{d}{dx}f(y)$

ここで，$\dfrac{d}{dx}f(y) = \dfrac{d}{dy}f(y) \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dx}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ となるので　$1 = \dfrac{dx}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

1.7　対数微分法

<u>例題 1</u>　$y = a^x$ を微分せよ。

〔解答〕

$a^x > 0$，$y > 0$ なので，両辺の自然対数をとると　$\log y = \log a^x$

$$\log y = x \log a$$

両辺 x で微分して　$\dfrac{y'}{y} = \log a$　つまり　$y' = y \log a$

したがって　$y' = a^x \log a$

1.8　媒介変数の微分

● 媒介変数の微分　$x = f(t)$，$y = g(t)$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

〔媒介変数の微分の証明〕

$x = f(t)$ を $t = h(x)$ として表すと　$y = g(t) = g(h(x))$

合成関数の微分より　$y' = g'(h(x)) \times h'(x)$　つまり　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$

さらに，逆関数の微分より　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$

1.9　陰関数の微分

<u>例題 2</u>　$x^2 + xy + y^2 = 1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

〔解答〕

$x^2 + xy + y^2 = 1$ の両辺を x で微分すると

$$2x + \left(y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

※　積の微分より　$(xy)' = 1 \cdot y + x \cdot y'$

※　合成関数の微分より　$(y^2)' = 2y \cdot y'$　となる。